

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (s.e.l.)

A veces es necesario trabajar de forma simultánea con más de una ecuación donde aparecen varias incógnitas; es decir, con sistemas de ecuaciones. Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar las soluciones comunes a todas las ecuaciones del sistema.

Por ejemplo, $2x - 3y = 7$ es una ecuación lineal con dos incógnitas y $2x + 3y + 5z = 10$ es una ecuación lineal con tres incógnitas.

También podemos considerar ecuaciones lineales con cuatro, cinco, o cualquier número de variables. Los sistemas más comunes son aquellos que están formados solo por ecuaciones lineales.

Se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas no están elevadas a potencias, ni multiplicadas entre sí, ni en el denominador.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto con varias ecuaciones lineales que se representa así:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

Donde la llave se usa para indicar que las ecuaciones deben tratarse simultáneamente.

Este sistema tiene m ecuaciones lineales con n incógnitas. Los números reales a_{ij} se llaman coeficientes del sistema.

Los x_i se llaman incógnitas del sistema.

Y los números reales b_j se llaman términos independientes.

La solución de este sistema es un conjunto ordenado de números reales (s_1, s_2, \dots, s_n) tales que al sustituir las incógnitas por estos valores se verifican **a la vez** las m ecuaciones (es decir, se cumplen todas las ecuaciones del sistema simultáneamente).

En el caso de que las incógnitas sean 2 se suelen designar simplemente con las letras x e y en vez de x_1 y x_2 , y en el caso de ser tres, x, y, z en lugar de x_1, x_2, x_3 pero esto no importa a la hora de resolver el sistema.

Como sabemos, las ecuaciones lineales con 2 incógnitas representan una recta en el plano.

Fijándonos en sus soluciones, los sistemas se clasifican en

$$\text{Sistemas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Compatibles} \\ \text{(con solución)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Determinados} \\ \text{(una solución)} \\ \text{Indeterminados} \\ \text{(infinitas soluciones)} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Incompatibles} \\ \text{(sin solución)} \end{array} \right\}$$

DISCUTIR un sistema es averiguar si el sistema tiene o no soluciones.

RESOLVER un sistema es hallar todas sus soluciones.

INTERPRETAR geoméricamente un sistema es conocer las posiciones que tienen las rectas en el plano (si son ecuaciones lineales con 2 incógnitas).

Y si atendemos a esto, podemos decir que:

ESTUDIAR un sistema = DISCUTIR + RESOLVER + INTERPRETAR

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son **EQUIVALENTES** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Si dos s.e.l. son equivalentes entonces tienen el mismo número de incógnitas aunque no necesariamente igual número de ecuaciones.

Los métodos de resolución de s.e.l. se basan en este criterio, es decir tratamos de escribir "otro sistema" que tenga las mismas soluciones, pero resulte más fácil de resolver que el dado.

Para conseguir sistemas equivalentes más sencillos realizamos transformaciones con las ecuaciones, es decir, operaciones elementales como las siguientes:

Dado un sistema de ecuaciones, resulta un sistema equivalente si:

- Se intercambian dos ecuaciones
- Una ecuación se multiplica o divide por un número $\neq 0$
- Sumamos a una ecuación k -veces otra ecuación cualquiera (la constante debe ser $k \neq 0$). Si $k = 1$ en la práctica significa sumar dos ecuaciones.

Sistemas con dos incógnitas

Los sistemas más sencillos son aquellos en los que sólo hay dos incógnitas y 2 ecuaciones, y tienen la forma:

$$\left. \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned} \right\}$$

La solución del sistema es un par de números (s_1, s_2) tales que al sustituir s_1 por x y s_2 por y se verifican a la vez las dos ecuaciones.

Hay varios métodos para resolverlos: REDUCCIÓN, SUSTITUCIÓN e IGUALACIÓN, vamos a ver cada uno de ellos con el mismo sistema:

El método de **sustitución** es habitual usarlo cuando alguna de las incógnitas tiene como coeficiente el 1. Consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra.

El método de **igualación** conviene usarlo cuando todas las incógnitas tienen coeficientes distintos de 1. Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar los resultados.

El método de **reducción** es el más habitual, sobre todo porque es el que se utiliza si el número de ecuaciones y de incógnitas es superior a dos. Consiste en eliminar una de las incógnitas aplicando una o varias de las transformaciones antes indicadas.

EJEMPLO 1 Un sistema de ecuaciones lineales con solución

Resolver el sistema: $\left. \begin{aligned} x + 2y &= 11 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned} \right\}$

Reducción

$$\left. \begin{aligned} -2x - 4y &= -22 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\hline -5y = -20$$

$$y = \frac{-20}{-5}$$

$$y = 4$$

$$x + 2 \cdot 4 = 11$$

$$x = 3$$

Sustitución

$$x = 11 - 2y$$

$$2(11 - 2y) - y = 2$$

$$-5y = -20$$

$$y = \frac{-20}{-5}$$

$$y = 4$$

$$x = 11 - 2 \cdot 4$$

$$x = 3$$

Igualación

$$x = 11 - 2y$$

$$x = \frac{y + 2}{2}$$

$$11 - 2y = \frac{y + 2}{2}$$

$$-5y = -20$$

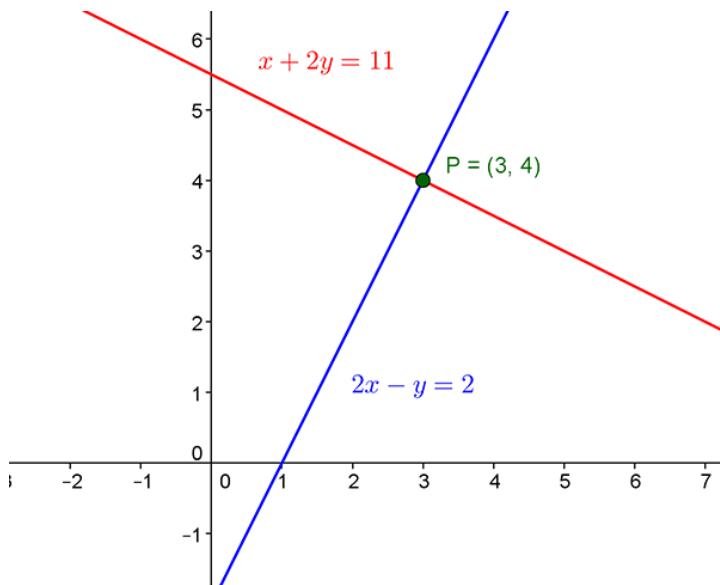
$$y = 4$$

$$x = 11 - 2 \cdot 4$$

$$x = 3$$

La solución del sistema es: $(3, 4)$

Interpretación: las gráficas de las dos ecuaciones son rectas que se cortan en el punto $(3,4)$, como vemos a continuación:



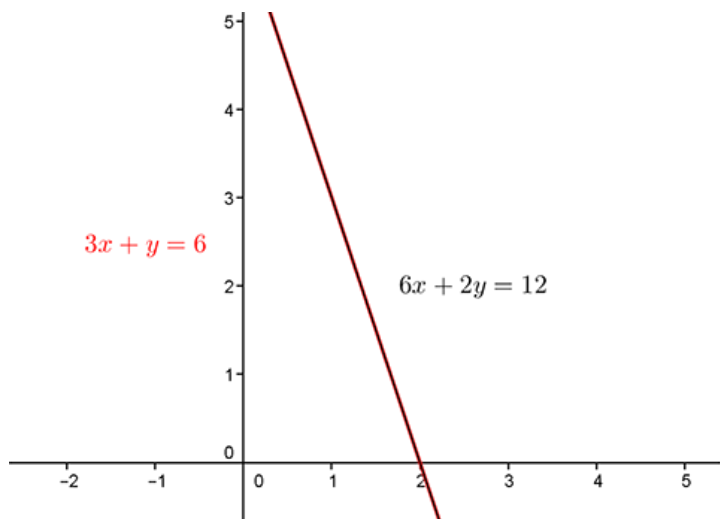
EJEMPLO 2 Un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 12 \end{cases}$$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ec. $\times(-2)$

$$\begin{array}{r} -6x - 2y = -12 \\ 6x + 2y = 12 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Como $0=0$ es una igualdad siempre cierta, el sistema tiene infinitas soluciones, por tanto es compatible indeterminado y la gráfica de cada ecuación es la misma recta.



Como $y = 6 - 3x$, dando valores a x se obtiene y . Así si le damos a x el valor arbitrario λ (lambda) entonces expresamos la solución así:

$$\begin{cases} y = 6 - 3\lambda \\ x = \lambda \end{cases} \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Y como λ puede ser cualquier número real, hay infinitas soluciones

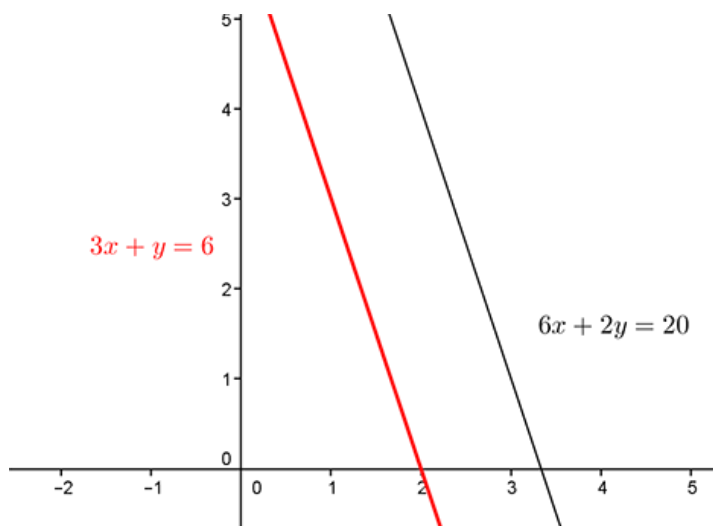
EJEMPLO 3 Un sistema de ecuaciones lineales sin soluciones

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 6x + 2y = 20 \end{cases}$$

Por reducción, multiplicamos la 1ª ec. $\times(-2)$

$$\begin{array}{r} -6x - 2y = -12 \\ 6x + 2y = 20 \\ \hline 0 = 8 \end{array}$$

Como $0=8$ es imposible, por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible. Las gráficas de las dos ecuaciones del sistema tienen la misma pendiente y, por tanto, son rectas paralelas. La conclusión de que el sistema no tiene solución concuerda con el hecho de que estas rectas no se cortan.



Puesto que la gráfica de cualquier ecuación lineal $ax + by = c$ es una recta, se cumple exactamente uno de los tres casos enumerados anteriormente para cualquier sistema de dos de estas ecuaciones.

Soluciones	Tipo	Gráfica
Una solución	Compatible Determinado	Rectas secantes
Infinitas soluciones	Compatible indeterminado	Rectas idénticas o coincidentes
No hay solución	Incompatible	Rectas paralelas